УДК 517.9

**І. Габрусєва**
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

# МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЯДРА ЯКИХ МІСТЯТЬ ФУНКЦІЇ БЕССЕЛЯ

При розв'язанні деяких задач математичної фізики, зокрема осесиметричних задач теорії пружності та термопружності, виникає необхідність в побудові розв'язків системи парних інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \eta\left[F_1(\eta)\varphi(\eta)+F_2(\eta)\psi(\eta)\right]J_0(\rho\eta)d\eta = f_1(\rho), & a\le\rho\le b; \\ \int_0^\infty \eta\left[F_3(\eta)\varphi(\eta)+F_4(\eta)\psi(\eta)\right]J_0(\rho\eta)d\eta = 0, & 0\le\rho\le a,\ \rho>b; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \eta\left[\Phi_1(\eta)\varphi(\eta)+\Phi_2(\eta)\psi(\eta)\right]J_0(\rho\eta)d\eta = f_2(\rho), & c\le\rho\le d; \\ \int_0^\infty \eta\left[\Phi_3(\eta)\varphi(\eta)+\Phi_4(\eta)\psi(\eta)\right]J_0(\rho\eta)d\eta = 0, & 0\le\rho\le c,\ \rho>d. \end{cases} \tag{2}$$

У співвідношеннях (1) та (2) $F_i(\eta)$, $\Phi_i(\eta)$ та $f_i(\rho)$ – відомі функції, $\varphi(\eta)$ та $\psi(\eta)$ – невідомі, $J_0(\rho\eta)$ – функція Бесселя 1-го роду. Продовживши другі співвідношення (1) та (2) на усю додатну піввісь функціями $x(\rho)$ та $y(\rho)$ відповідно і застосувавши до одержаних співвідношень формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, одержується система алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\varphi(\eta)$ та $\psi(\eta)$. Після її розв'язання матимемо:

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\Delta(\eta)}\left[X(\eta)\Phi_4(\eta)-Y(\eta)F_4(\eta)\right],\ \psi(\eta)=\frac{1}{\Delta(\eta)}\left[Y(\eta)F_3(\eta)-X(\eta)\Phi_3(\eta)\right], \tag{3}$$

де $\Delta(\eta)=\Phi_4(\eta)F_3(\eta)-\Phi_3(\eta)F_4(\eta)$,

$$X(\eta)=\int_a^b \rho x(\rho)J_0(\rho\eta)d\rho,\ Y(\eta)=\int_c^d \rho y(\rho)J_0(\rho\eta)d\rho.$$

Функції $x(\rho)$ та $y(\rho)$ доцільно вибирати у вигляді:

$$x(\rho)=\sum_{n=1}^N a_n\left[J_0\left(\frac{\rho\lambda_n}{a}\right)N_0(\lambda_n)-J_0(\lambda_n)N_0\left(\frac{\rho\lambda_n}{a}\right)\right], \tag{4}$$

$$y(\rho)=\sum_{n=1}^N b_n\left[J_0\left(\frac{\rho\gamma_n}{c}\right)N_0(\gamma_n)-J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{\rho\gamma_n}{c}\right)\right], \tag{5}$$

$$J_0\left(\frac{d}{c}\gamma_n\right)N_0(\gamma_n)-J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{d}{c}\gamma_n\right)=0,\quad J_0\left(\frac{b}{a}\lambda_n\right)N_0(\lambda_n)-J_0(\lambda_n)N_0\left(\frac{b}{a}\lambda_n\right)=0,$$

де $a_n$ та $b_n$ – невідомі коефіцієнти.

Таким чином, для функцій $\varphi(\eta)$ та $\psi(\eta)$, що визначаються рівностями (3), автоматично виконуватимуться перші співвідношення (1) та (2). Підставимо вирази (3), (4) та (5) у другі співвідношення (1) та (2), і помножимо їх ліву та праву частини на $\rho J_0(\rho\lambda_n)$ та $\rho J_0(\rho\gamma_n)$ відповідно. Після інтегрування одержаних виразів по відрізках $[a,b]$ та $[c,d]$ відповідно, отримуємо систему відносно невідомих $a_n$ та $b_n$.